Задания для 5-7 классов

1. В сказочном Царстве в Приморском государстве есть три города: Апельсиновый, Банановый и Виноградный. Из Апельсинового города в Банановый ведут 5 тропинок, а из Бананового в Виноградный – 7 тропинок. Сколько существует всего различных маршрутов прохода из Апельсинового в Виноградный через Банановый?

Решение. Из Апельсинового в Банановый есть 5 тропинок. Далее, для каждой из этих пяти тропинок есть по 7 тропинок из Бананового в Виноградный, т.е. если мы из Апельсинового в Банановый пошли по первой тропинке, то далее из Бананового в Апельсиновый есть 7 тропинок; если мы из Апельсинового в Банановый пошли по второй тропинке, то далее также из Бананового в Апельсиновый есть 7 тропинок и т.д. Таким образом, для каждой из пяти тропинок из Апельсинового в Банановый есть 7 тропинок из Бананового в Виноградный, то есть всего различных маршрутов будет 5*7=35.

2. В музее «Эволюционной Техники» имеется 24 телевизора, причём часть из них имеет одну антенну, а другая часть – две антенны. Сколько телевизоров с одной антенной, а сколько с двумя находится в музее, если всего у них 41 антенна?

Решение. Допустим, что все наши телевизоры с одной антенной. Тогда у них будет 24 антенны. Чтобы получить наш вариант с 41 антенной необходимо менять телевизоры с одной антенной на телевизоры с двумя антеннами. Каждая замена добавит нам 1 лишнюю антенну, а всего потребуется добавить 41-24=17 антенн. Это означает, что нужно произвести 17 замен. Следовательно, в музее 17 телевизоров с двумя антеннами и 24-17=7 с одной.

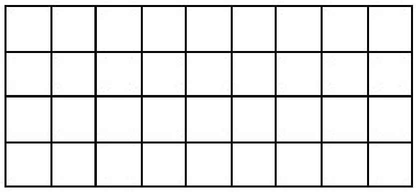
3.Сколько цифр должно содержать число 777…77, чтобы оно было кратно 19?

Решение. Будем делить столбиком 77 на 19, затем 777 на 19 и т.д., добавляя по одной семёрке до того момента, пока число не разделится нацело на 19. Наименьшее такое число, которое разделится на 19 есть 777777777777777777, содержащее 18 семёрок. При этом стоит отметить, что следующее подобное число из семёрок будет делиться на 19, если будет содержать 36 цифр. Таким образом, число 777…77 будет кратно 19, если количество семёрок в нём будет равно 18 или будет кратно 18.

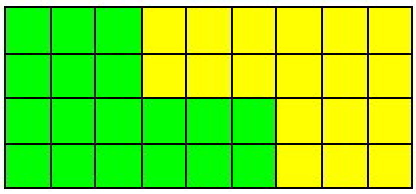
4. Обычно за Павликом после уроков приезжает папа. Однажды уроки закончились раньше обычного, и Павлик пошел домой пешком. Спустя 20 минут он встретил папу, сел в машину и приехал домой на 10 минут раньше. На сколько минут раньше закончились уроки?

Решение. Папа выехал за Павликом как обычно, но вернулись они на 10 минут раньше. Это время было сэкономлено за счёт того, что папа не проехал расстояние от места встречи с Павликом до школы и обратно. Значит, от места встречи до школы 5 минут на машине (в одну сторону). Тогда уроки закончились раньше на 20+5 = 25 минут.

5. Разрежьте прямоугольник размером 4×9 на две части с таким расчетом, чтобы в результате из них можно было сложить квадрат.



Решение.



Задания для 8-9 классов

1. Учитель записал число, месяц и год, когда он родился. Потом он умножил число на номер месяца и получил 372. Когда у него день рождения? Найдите все варианты и докажите, что других вариантов нет!

Решение. 372 – это произведение числа и месяца. Чтобы найти приемлемые для нас варианты, приведём все произведения двух чисел, результат которых 372.

372=1*372

372=2*186

372=3*124

372=4*93

372=6*62

372=12*31

Единственный вариант, который нам подходит – последний, то есть 31.12. Значит, учитель родился 31 декабря.

2. Определите, сколько диагоналей в выпуклом семиугольнике.

Решение. Возьмём произвольную вершину семиугольника, всего их семь, и выберем другую вершину, в которую мы можем провести прямую, которая будет диагональю. Понятно, что таких вершин будет 4, так как мы должны выбрать не саму вершину, которую взяли изначально, а также не смежные с ней, иначе, диагональ не получим. Таким образом, можно будет провести 4 диагонали из этой произвольной вершины. Таким образом, всего будет 7*4=28 отрезков, но каждая диагональ связывает два угла. Если диагональ выходит из угла A в угол B, то она же выходит из угла B в угол A, поэтому количество нужно разделить пополам, то есть всего будет 28/2=14 диагоналей у семиугольника.

3. Одна мельница перемалывает 19 центнеров пшеницы за 3 часа, другая – 32 центнера за 5 часов, третья – 10 центнеров за 2 часа. Как распределить между ними 133 тонны пшеницы, чтобы одновременно начав работу, они окончили её одновременно?

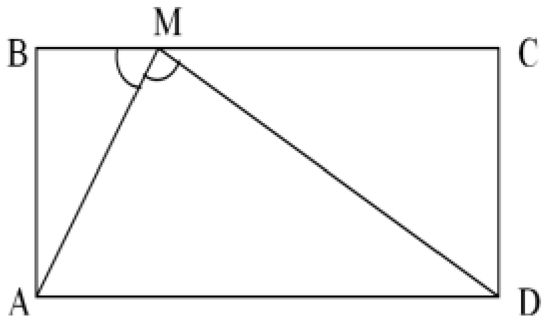
Решение. Сначала определим скорости, с которыми каждая мельница перемалывает пшеницу. Они будут 19/3 ц/час, 32/5 ц/час и 5 ц/час. Умножая на 15 каждую из этих дробей, получаем числа, которым пропорциональны эти скорости: 95, 96, 75. Привезённые 133 тонны пшеницы нужно распределить по мельницам прямо пропорционально скоростям. Всего частей будет 95+96+75=266. На одну часть приходится 133/266=0,5 т. Следовательно, получаем 0,5*95=47,5 т, 0,5*96=48 т, 0,5*75=37,5 т.

4. Имеется $2k + 1$ карточек, занумерованных числами от 1 до $2k + 1$. Какое наибольшее число карточек можно выбрать так, чтобы ни один из извлечённых номеров не был равен сумме двух других извлечённых номеров?

Решение. Если взять все карточки с нечётными номерами (их $k + 1$), то условие будет выполнено. Если взять $k + 2$ карточки, то, вычитая из наибольшего их номера N все остальные, мы получим $k + 1$ различное число. Все эти числа не превышают $2k$, поэтому хотя бы два из них совпадут с номерами на $k + 2$ выбранных карточках. По крайней мере один из этих двух номеров не равен $^N/_2$. Ответ: $k + 1$ карточку.

5. В прямоугольнике ABCD на стороне BC взята точка M так, что ∠AMD = =∠AMB. Найдите эти углы, если AD = 2AB.

Решение. ABCD – прямоугольник, значит прямые BC||AD по свойству. ∠MAD и ∠AMB накрест лежащие, образованные параллельными прямыми BC||AD при секущей AM, то ∠MAD=∠AMB. Из того, что ∠AMD=∠AMB и ∠MAD=∠AMB следует, что ∠AMD=∠MAD. Значит треугольник AMD – равнобедренный по признаку. Тогда, AD=DM. Так как ABCD – прямоугольник, то AB=CD. По условию AD= 2AB. Получаем в прямоугольном треугольнике CMD: MD=2CD. Следовательно, ∠CMD=30^o. Так как ∠AMB+∠FMD+∠CMD=180^o и ∠AMD =∠AMB, ∠CMD=30^o, то ∠AMD = ∠AMB=(180^o - 30^o)/2=75^o



Задания для 10-11 классов

1. Сколько существует двузначных чисел, делящихся на произведение своих цифр?

Решение. Пусть ab = 10a +b - двузначное число, где a - цифра десятков, b-единиц. Согласно условию имеем:

10a + b = kab, или b= a(kb - 10), откуда следует, что b кратно a.

Итак, b = ma, где a и b — однозначны, поэтому и m - однозначно.

Так как 10a+b=10a+ma=a(10+m) и 10a+b=kab, то a(10+m)=kab, т.е. 10+m=kb, или 10+m=kma, следовательно, 10 = m (ka - 1), значит, m - делитель числа 10, тогда m=1; 2; 5; ka=10/m+1.

1. Если m = 1, то a = 1, b = 1. Искомое число 11.
2. Если m = 2, то a = 1, 2, 3, и b = 2, 4, 6. Получим 3 числа: 12, 24 и 36.
3. Если m = 5, то a = 1, b = 5, т.е. получим число 15.

Таким образом, находим всего 5 чисел: 11, 12, 24, 36, 15.

2. Решить уравнение cos$x$+cos7x=2.

Решение. Так как косинус не может быть больше 1, то сумма двух косинусов равна 2 тогда и только тогда, когда каждый их косинусов равен 1. Таким образом, данное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} \cos x = 1, \\ \cos 7x = 1. \end{cases}$$

По единичной окружности находим решение первого уравнения и второго:

$$\begin{cases} x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \dfrac{2\pi k}{7}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Объединяем эти решения и получаем решение системы: $x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

3. Дана арифметическая прогрессия. Сумма первых её 10 членов равна 60, а сумма первых 20 её членов равна 320. Чему может быть равен 15-й член этой прогрессии?

Решение. Пусть первый член последовательности равен a, а разность равна b. Тогда сумма первых 10 её членов равна $a + (a + b) + . . . + (a + 9b) = 10a+45b$. Сумма первых двадцати членов равна $a+(a+b)+. . .+(a+19b) = 20a + 190b$. По условию $10a + 45b = 60, 20a + 190b = =320$. Решая систему, находим $a = -3, b = 2$. Тогда 15-й член — это $a + 14b = 25$.

4.Найти наибольшее целое решение неравенства

$$\frac{x-3\sqrt{x}-4}{x+2\sqrt{x}-3}<0.$$

Решение. Сделаем замену: $t=\sqrt{x},\ t\geq 0,$ получим:

$$\frac{t^2-3t-4}{t^2+2t-3}<0.$$

Разложим числитель и знаменатель на множители, получим:

$$\frac{(t+1)(t-4)}{(t-1)(t+3)}<0.$$

Решая это неравенство методом интервалов, получаем: $-3<t<-1,\ 1<t<4.$ Учитывая, что $t>0$, получаем: $1<t<4.$ Делая обратную замену, получаем: $1<x<16.$ Таким образом, наибольшим целым решением неравенства является 15.

5. В выпуклом пятиугольнике ABCDE угол ACE в два раза меньше, чем угол BCD, а все стороны равны. Найдите угол ACE.

Решение. Из условия задачи следует, что ∠ACB+ ∠ECD= ∠ACE.

Покажем, что BAED – параллелограмм. Действительно, используя равенство углов при основаниях в равнобедренных треугольниках ABC и CDE и равенство ∠ACB+ ∠ECD= ∠ACE, получим: ∠BAE + ∠AED = ∠BAC + ∠CAE + ∠CEA + ∠DEC = ∠ACB + ∠ECD + (180° – – ∠ACE)=180°.

Таким образом, AB||DE и AB = DE (по условию), то есть BAED - параллелограмм. Тогда BD=AE, значит, треугольник BCD – равносторонний. Следовательно, ∠ACE = 0,5∠BCD= 30°.