

Направление «Математика и информатика»

Олимпиадное задание по направлению «Математика и информатика» состоит из двух частей.

Инвариантную часть нужно выполнить всем участникам.

Вариативная часть разделена на четыре блока, следует сосредоточиться только на одном из них.

Время выполнения заданий – 180 минут. Максимальное количество баллов – 100

ИНВАРИАНТНАЯ ЧАСТЬ (50 баллов)

Однажды два жадных медвежонка нашли головку сыра, масса которой $M = 7$ кг. Они хотели поделить сыр поровну, но не сумели: разломали головку на два куска массой $M_1 = 4$ кг и $M_2 = 3$ кг. Стали медвежата рычать друг на друга, на шум прибежала Лиса и предложила медвежатам свою помощь в справедливом разделении сыра.

За одну минуту Лиса съела от первого куска столько сыра, что массы первого и второго кусков стали одинаковыми, а затем мгновенно откусила от первого куска ещё b_1 кг. Тогда второй кусок стал больше. И за полминуты Лиса съела от второго куска столько сыра, что массы первого и второго кусков стали одинаковыми, после чего мгновенно откусила от второго куска ещё b_2 кг.

После этого Лиса за четверть минуты съела от первого куска столько сыра, что массы первого и второго кусков опять стали равны, а затем мгновенно откусила от первого куска ещё b_3 кг. И опять второй кусок стал больше. Тогда Лиса за одну восьмую минуты съела от второго куска столько, что массы кусков опять стали одинаковыми, а после этого мгновенно откусила от второго куска ещё b_4 кг.

И так Лиса всё делила и делила сыр.

Ровно через две минуты Лиса остановилась, очень довольная собой.

Докажите, что Лиса бесконечно много раз откусила от каждого куска.

Сколько сыра досталось Лисе за эти две минуты, если $b_n = \frac{2}{n \cdot (n+2)}$, $n = 1, 2, 3, \dots$?

Сколько сыра осталось каждому медвежонку?

Может ли Лиса выбрать числа b_n так, чтобы через две минуты каждому медвежонку сыр остался, но при этом первому досталось больше? Если нет, докажите, если да, то приведите пример.

ВАРИАТИВНАЯ ЧАСТЬ (50 баллов)

Выберите **только один** из предложенных блоков. В бланке ответов обязательно укажите номер блока

БЛОК 1. Математика

Постройте эскиз графика и найдите выражение для функции

$$F(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{1-x^2} f(x^{2^n} \cdot t) dt, \text{ где } f(u) = \begin{cases} \frac{\sin u}{u}, & u \neq 0; \\ k, & u = 0. \end{cases}$$

на отрезке $[-1, 1]$. При каком значении параметра k функция $F(x)$ непрерывна на отрезке $[-1, 1]$?

БЛОК 2. Математика

Квадратная матрица $A = (a_{ij})$ порядка n над полем действительных чисел при повороте на 90° меняет знак,

то есть при любых $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ выполняется равенство $a_{ij} = -a_{n+1-j, n+1-i}$.

Какие значения может принимать определитель этой матрицы при заданном n ?

БЛОК 3. Информационные системы и технологии

Задача про загрузку посудомоечной машины

У многих дома стоит замечательная помощница – посудомоечная машина. Но всем ее счастливым обладателям неоднократно приходится решать задачу оптимизации (по оптимальной загрузке посуды).

Задача:

1. Разработать структуру базы данных для учета имеющейся посуды в доме (учитывать размер тарелок, кастрюль, сковородок, кружек, фужеров) и структуру базы данных для загрузки посуды в машину (примем, что в машине 2 ряда (полки) для размещения посуды разного размера). Грязная и чистая посуда отличаются статусом.
2. По имеющейся грязной посуде предложить порядок ее укладки (или составить базу знаний или правил), с указанием ячейки. Учесть возможность перекрытия большими предметами меньших. Учесть степень загрязненности посуды (для определения уровня ячейки в посудомойке).
3. Дать возможность назначения приоритетов – в первую очередь мыть то, что требуется в ближайшее время (в случае если, скопилось много грязной посуды).
4. Иметь возможность выбора режима мытья – стандартный или быстрый (для не сильно загрязненной посуды), если есть необходимость быстро перемыть большое количество (например, большой семейный праздник). При стандартном режиме расходуется в 1,5 раза больше воды, чем при быстром.
5. Иметь возможность получить отчеты о количестве выполненных циклов мытья посуды за определенное время, количестве перемытой посуды по видам.
6. Иметь возможность получения списка грязной и чистой посуды.

Необходимо:

1. Описать алгоритм расчета загрузки посудомоечной машины с опорой на характеристики посуды. Формализовать и продемонстрировать на примерах различные ситуации укладки посуды, с точки зрения обеспечения чистоты промывки.
2. Используя любую общепринятую нотацию, изобразить схему инфологической модели предметной области.
3. Используя любую общепринятую нотацию, изобразить схему даталогической модели базы данных, удовлетворяющую третьей нормальной форме, с выделением первичных и внешних ключей, типа и направления связей.
4. Используя языки запросов SQL/NoSQL, написать запрос для вывода отчета о количестве моек, количестве перемытой посуды по видам.

Требования к структуре оформления решения с указанием критериев оценивания и максимального количества баллов за каждую часть решения

| Критерии оценки | Баллы |
|--|-----------|
| Описание алгоритма (в виде схемы алгоритма) расчета загрузки посудомоечной машины с опорой на характеристики посуды и рекомендации по укладке | 20 |
| Полнота описания возможных ситуаций укладки посуды и демонстрация на примерах, с точки зрения обеспечения чистоты промывки | 5 |
| Схема технического решения для реализации алгоритма загрузки посудомоечной машины с обоснованием используемых технических средств | 10 |
| Описание процессов, описание инфологической модели предметной области | 5 |
| Структура базы данных, отражающая специфику предметной области. БД должна соответствовать третьей нормальной форме, не быть перегруженной дублированием, учитывать сущности-справочники, не иметь ошибок по связям | 5 |
| Описание SQL/NoSQL-запроса для вывода отчета о количестве моек, количестве перемытой посуды по видам | 5 |
| Максимальный балл | 50 |

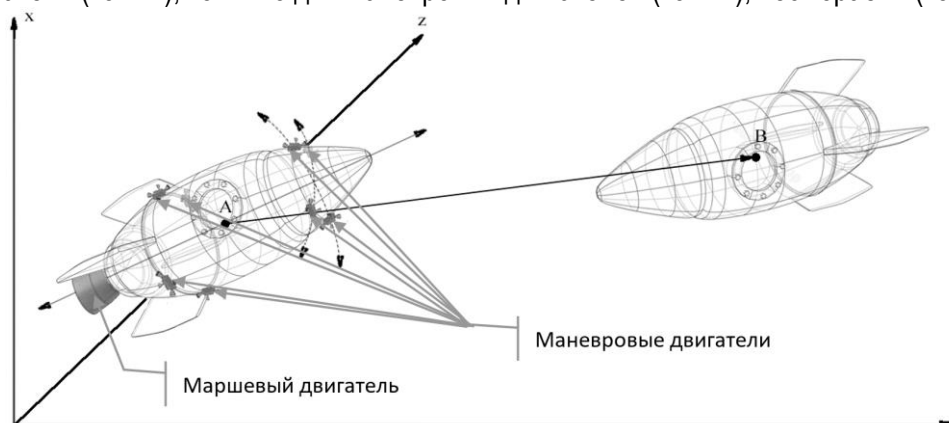
БЛОК 4. Информационные системы и технологии

Полет космического корабля

Задача:

разработать алгоритм работы двигателей космического корабля для перемещения из одной точки (A) трехмерного пространства в другую (B). Положение начальной и конечной точек, а также положение (ориентация) корабля в пространстве произвольные. Скорости и ускорения (движения и вращения) в начальной и конечной точке равны нулю. Влияния внешних факторов на космический корабль не учитываем.

Характеристики корабля: маршевый двигатель (основной), маневровые двигатели (ориентации), топливо для маршевого двигателя (тонны), топливо для маневровых двигателей (тонны), вес корабля (тонны).



Маневровые двигатели необходимы для поворота космического корабля вокруг его центра масс (считаем, что центр масс находится в самом центре космического корабля). Поворот осуществляется путем создания импульса для начала поворота и импульса для остановки поворота. Блок маневровых двигателей состоит из 4х (можно двух) реактивных двигателей, направленных в разные стороны.

Маршевый двигатель необходим для создания достаточного импульса для движения космического корабля вдоль его центральной оси и для торможения (при этом космический корабль должен быть повернут маршевым двигателем вперед по направлению движения).

Необходимо:

1. Описать алгоритм работы двигателей космического корабля для перемещения из одной точки трехмерного пространства в другую.
2. Рассчитать минимальное количество включений каждого двигателя необходимое для достижения космическим кораблем конечной точки в пространстве.
3. Рассчитать потребление топлива для маршевого и маневровых двигателей при минимальном количестве включений двигателей. Потребление абстрактно и задаётся на усмотрение участника.
4. Продемонстрировать работу алгоритма на тестовом примере.

Требования к структуре оформления решения с указанием максимального количества баллов за каждую часть решения

| Критерии оценки | Баллы |
|--|-----------|
| Алгоритм работы двигателей космического корабля для перемещения из одной точки трехмерного пространства в другую | 15 |
| Схема технического решения для реализации алгоритма работы двигателей космического корабля для перемещения из одной точки трехмерного пространства в другую с обоснованием количества двигателей и их размещением | 10 |
| Расчёт минимального количества включений каждого двигателя для перемещения из одной точки трехмерного пространства в другую | 5 |
| Предложить схему расчета/учета потребления топлива для маршевого и маневровых двигателей при минимальном количестве включений двигателей для перемещения из одной точки трехмерного пространства в другую | 5 |
| Демонстрация решения задачи на тестовом примере (включая расчёт минимального количества включений каждого двигателя и расчет потребления топлива для маршевого и маневровых двигателей при минимальном количестве включений двигателей для перемещения из одной точки трехмерного пространства в другую) | 15 |
| Максимальный балл | 50 |