5-7 класс

1. У деда Мороза есть пять коробок подарков, одинаковые по размеру, но разные по цвету: две коробки красные, одна сиреневая и две зеленые. Есть два мешка. Один с рисунком, который помещает два подарка, а второй без рисунка, вмещающий три подарка. Сколькими способами можно разложить эти подарки в имеющиеся два мешка?

Решение. Пусть К – красные коробки, С – сиреневые, З – зеленые, тогда получим пять способов размещения имеющихся коробок: КК, КС, КЗ, ЗС, ЗЗ.

Ответ. 5.

2. Учитель по математике решил провести забавную игру, в которой участникам предлагалось решить 30 задач. За каждую верно решенную задачу давалось 13 баллов, а за неверно решенную списывали 10 очков. Один из участников решил все задачи, но получил только 206 баллов. Сколько задач он решил верно?

Решение. Составим таблицу с верными ответами и соответствующими баллами:

Верные ответы	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20
Баллы	390	367	344	321	298	275	252	229	206	183	160

Стоит отметить, что количество набранных баллов уменьшается на 13+10=23.

Ответ. 22.

3. Миша, Саша и Сережа пришли в школу в красной, синей и зеленой рубашках. Их кроссовки были тех же цветов. Кроссовки и рубашка Саши были одного цвета. На Сереже не было ничего красного. Кроссовки Миши были зеленые, а рубашка нет. Каких цветов были кроссовки у Саши и Сережи?

Решение. Занесем имеющиеся в условии данные в таблицу:

	Кроссовки	Рубашка
Миша	Зеленый	Не зеленая
Саша		
Сережа	Не красный	Не красный

По условию у Сережи кроссовки не красные и не зеленые, так как зеленые у Миши. Значит у Сережи синие кроссовки, а у Саши – красные.
Ответ. У Сережи – синие, у Саши – красные.

4. В некотором царстве в тридесятом государстве жил был царевич Иван Молодой, и была у него невеста Василиса Премудрая. Решили они отпраздновать свою свадьбу на полную катушку, такое веселье закатить, чтобы весь мир содрогался, да что там мир, вся галактика. Благо средства у них были. Чтобы молодым самим не тревожиться по поводу организации сего торжества, нанят был специальный человек Кощей Илларионович. Когда торжество прошло и пришло время рассчитываться за оказанные услуги нанятому Кощею Илларионовичу, обнаружилось, что затраты были баснословно велики. Василисе Премудрой не понравился этот счёт, и она сразу заподозрила что-то неладное. Она попросила все договора, счета, отчетность по организации свадьбы и попросила день отсрочки платежа. Не спав всю ночь, Василиса Премудрая проверила все документы и выяснила, что Кощей Илларионович постоянно совершал ошибки в расчетах, якобы случайно. А именно в значениях баланса были перепутаны цифры местами и заменены отдельные числа в итоговых значениях. Окончательно убедилась в своей правоте Василиса Премудрая, увидев следующую запись:

$$\begin{array}{r} 9364311 \\ +\;\underline{2487924} \\ 1\mathbf{1}825545 \end{array}$$

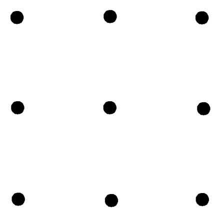
Василиса Премудрая поняла, что цифры внутри слагаемых переставлены, а вторая (выделенная жирным) цифра суммы подчищена и заменена на новую. Более того, Василиса Премудрая смогла восстановить итоговое число, получившееся в результате сложения. Скажите, как ей это удалось и чему равно это итоговое число?

Решение. Василисе Премудрой удалось найти итоговое число благодаря тому, что она догадалась, что сумма цифр в первом слагаемом делится на 9, и во втором также делится на 9. Значит по свойствам делимости сама сумма также делится на 9. Обозначим за k подчищенную цифру, тогда 1+k+8+2+5+5+4+5=30+k должно делиться на 9. Это возможно только, если k=6. Значит, итоговое число равно 16825545.

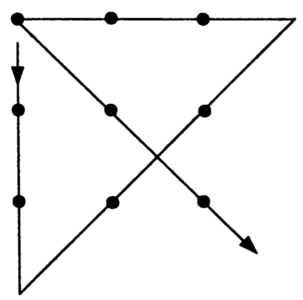
Ответ. 16825545.

Замечание. Максимум 10 баллов начисляется участнику олимпиады, который указал на применение в решении признака деления на 9 и нашел верное итоговое число. Решение с помощью подбора при правильном ответе оценивается в 5 баллов из 10. В случае нахождения итогового числа при помощи некоторого «умного» перебора, участнику начисляется 8 баллов.

5. Через девять точек, расположенных в форме квадрата, провести четыре прямые линии, не отрывая ручки от бумаги.



Решение.



8-9 классы

1. Три предпринимателя решили построить один офис на троих общей площадью 90 квадратных метра и стоимостью 5 миллионов рублей. Заключили они следующий договор. Первый предприниматель вкладывает 2 миллиона рублей, второй – 3 миллиона рублей, а третий предприниматель в качестве своей доли предоставляет пять подержанных автомобилей-малолитражек одинакового качества. Каждый предприниматель будет использовать по 30 квадратных метров построенного офиса. Как следует разделить автомобили между первым и вторым предпринимателями, чтобы сделка была честной?

Решение. Всего на строительство офиса было израсходовано 5 миллионов рублей, из чего следует, что на каждого предпринимателя расход составляет 5/3 миллиона рублей. Таким образом, первый предприниматель за третьего отдал 1/3 суммы, а в второй – 5/3 суммы. Следовательно, первому предпринимателю полагается один автомобиль, а второму – четыре.

Ответ. Первому предпринимателю полагается один автомобиль, а второму – четыре.

2. Решите неравенство:

$$|x+2|\leq|x|.$$

Решение. Значение модуля всегда неотрицательное, поэтому можно обе части неравенства возвести в квадрат, получим:

$(x+2)^2\leq x^2$, значит $x^2+4x+4-x^2\leq 0$, откуда $4x+4\leq 0$, $x\leq -1$.

Ответ. $(-\infty;-1]$.

Замечание. Данное неравенство можно было решить с помощью корректного раскрытия обоих модулей. За подобное решение также выставлялся максимальный балл при наличии обоснованного решения и правильного ответа.

3. Автомобиль проехал расстояние между двумя городами со скоростью 60 км/ч, а возвращался со скоростью 80 км/ч. Определите среднюю скорость автомобиля.

Решение. Средняя скорость равняется отношению всего пути ко всему времени поездки. Пусть расстояние между городами равняется S км, тогда вся поездка составила 2S км. Время проезда в одну сторону составило S/60, а в обратную сторону – S/80. Тогда время всей поездки составило S/60+ S/80=7S/240. Таким образом, средняя скорость составила 2S:7S/240=$68\frac{4}{7}$ км/ч.

Ответ. $68\frac{4}{7}$.

Замечание. В случае корректного решения, но неверного (не до конца доведенного) ответа задание оценивается в 8 баллов.

4. Предприимчивый Семён Семёнович привозит арбузы из одной южной страны к себе в небольшой северный городок. При очередной перевозке 12-ти килограммового арбуза, который содержал 99% жидкости, Семён Семёнович остановился на некоторое время погостить у друга. Приехав домой, Семён Семёнович обнаружил, что арбуз усох и стал содержать 98% жидкости. А каким стал вес арбуза?

Решение. Масса «сухого вещества» арбуза составляет 1% первоначальной массы, или 0,12 кг. После того, как арбуз усох, масса «сухого вещества» составляла 2% от новой массы, то есть 6 килограмм.

Ответ. 6.

5. Периметр треугольника равен 48 см, а одна из сторон равна 18 см. найдите две другие стороны, если их разность равна 4,6 см

Решение. По условию одна из сторон треугольника равна 18 см, найдем две другие. Для этого из периметра вычтем длину известной стороны, получим 30 см. Таким образом, сумма двух сторон равна 30, а разность, по условию, равна 4,6. Тогда, очевидно, оставшиеся стороны равны 17,3 см и 12,7 см.

Ответ. 17,3 и 12,7

10-11 классы

1. Любопытный ученик спросил у учителя: «Сколько Вам лет?» Учитель ответил: «Первая цифра равна возрасту моего старшего внука, а вторая – возрасту моего младшего внука». «Я не знаю возраст Ваших внуков» - вскрикнул ученик. «Не переживай, если сложишь вместе возраст моих младшего и старшего внуков и мой, то получишь 83,» - добавил учитель. Сколько же лет учителю?

Решение. Пусть первая цифра возраста учителя равна x, а вторая – y. Очевидно, $1\leq x\leq 9$, $1\leq y\leq 9$, причём, x и y – натуральные. Тогда, возраст учителя можно представить как $10x+y$, сложив возраст внуков и учителя, получим $x+y+10x+y=83$. Следовательно, $11x+2y=83$. Так как $1\leq y\leq 9$, то $2\leq 2y\leq 18$, значит, $65\leq 11x\leq 81$, откуда имеем, что x может быть либо 6, либо 7. Если x=6, то y=8,5, то есть не натуральное. Если x=7, то y = 3. Значит, учителю 73 года.

Ответ. 73.

2. Директор школы отчитался на педсовете об учащихся, сдавших ОГЭ. Оказалось, что процент учеников, сдавших ОГЭ, находится в интервале от 96,7% до 97,1% от числа учащихся в школе. Какое общее возможное *минимальное* количество сдававших ОГЭ в данной школе?

Решение. В связи с тем, что по условию, процент учеников, сдавших ОГЭ, находится в интервале от 96,7% до 97,1% от числа учащихся в школе, то, значит, в школе хотя бы один ученик точно ОГЭ не сдал. Чтобы количество сдававших было минимально, положим, что только один ученик не сдал ОГЭ. Очевидно, что процент не сдавших ОГЭ, от 2,9% до 3,3%. Так как мы предполагаем, что один ученик не сдал ОГЭ, то обозначив за x – общее количество сдававших, а 2,9%=0,029 долей и 3,3%=0,033 имеем:

$$0{,}029 \leq \frac{1}{x} \leq 0{,}033.$$

Решив, данное неравенство, приходим к выводу:

$$30\frac{10}{33} \leq x \leq 34\frac{14}{29}.$$

Так как x – это общее количество сдававших, то оно должно быть целым, то есть, в нашем случае, 31, 32,33 или 34. Наименьшее из них – 31.

Ответ. 31.

3. Решить уравнение

$$\frac{1}{(x+2003)(x+2004)}+\frac{1}{(x+2004)(x+2005)}+\frac{1}{(x+2005)(x+2006)}+$$
$$+\frac{1}{(x+2006)(x+2007)}=\frac{1}{999999}.$$

Решение. Заметим, что:

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}.$$

Тогда данное уравнение имеет вид:

$$\frac{1}{x+2003}-\frac{1}{x+2004}+\frac{1}{x+2004}-\frac{1}{x+2005}+\frac{1}{x+2005}-\frac{1}{x+2006}+$$
$$+\frac{1}{x+2006}-\frac{1}{x+2007}=\frac{1}{999999}.$$

Откуда имеем:

$$\frac{1}{x+2003}-\frac{1}{x+2007}=\frac{1}{999999}.$$

Положим: x+2005=t. Тогда имеем:

$$\frac{1}{t+2}-\frac{1}{t-2}=\frac{1}{999999}.$$

Приведя к общему знаменателю, решим данное уравнение, получим: t_1=2000, t_2= –2000.

Сделав обратную замену, получим: x_1= –5, t_2= –4005.

Ответ. –5; –4005.

4. Найдите трехзначное число, которое уменьшится в 7 раз при зачеркивании в нем средней цифры.

Решение. Пусть данное число будет 100a+10b+c, где a>0. По условиям задачи:

$100a+10b+c=7(10a+c)$, $30a=6c-10b$, $15a=3c-5b$, $5b=3c-15a$.

Правая часть уравнения кратна трем, поэтому и левая часть уравнения кратна 3, то есть b кратно 3. Возможны 4 случая:

1) $b=0$, то $c=5a$, $a=1$, $c=5$, искомое число равно 105;

2) $b=3$, то $15=3c-15a$, $c=5a+5$, $a>0$, $c>9$, такого числа нет;

3) $b=6$, то $30=3c-15a$, $10=c-5a$, $c=10+5a$, $a>0$, $c>10$, такого числа нет;

4) $b=9$, то $45=3c-15a$, $15=c-5a$, $c=15+5a$, $a>0$, $c>15$, такого числа нет.

Ответ. 105.

5. Площадь правильного треугольника равна 36. Отрежем от каждой вершины по маленькому правильному треугольнику так, чтобы остался правильный шестиугольник. Какова площадь этого шестиугольника?

Решение. Пусть площадь маленького треугольника равна S, тогда в центре образовался правильный шестиугольник, который состоит из шести таких же правильных треугольников. Площадь шестиугольника будет 6S.По условию задачи имеем: S+S+S+6S=36, 9S=36, S=4, 6S=24.

Ответ. 24.

Замечание. Возможны иные способы решения данной задачи. При правильном ответе и корректном решении любой из них оценивается в максимальный балл.