<u>Решение инвариантной части</u>.

Заметим, что за две минуты Лиса может сделать бесконечно много шагов, так как $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n+1} = 2$.

На первом шаге Лиса съела от первого куска M_1-M_2=1 и откусила b_1 кг. На втором она съела от второго куска b_1 и откусила b_2 кг. И так далее… . То есть, от первого куска Лисе достанется $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, а от второго $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ кг.

Сумма $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\cdot(n+2)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, значит, Лисе достанется $1 + 2\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = 4$ кг.

Так как $M_1 - 1 - \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{3}{2}$ и $M_2 - \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{3}{2}$, то ни на каком конечном шаге сыр не закончится (куски будут иметь массу больше $\frac{3}{2}$, и на каждом шаге куски будут получаться разными. Так как ни на каком конечном шаге сыр не закончится, то Лиса сделает бесконечно много шагов. Каждому медвежонку достанется по $\frac{3}{2}$ кг. Невозможно подобрать числа b_n так, чтобы медвежатам досталось разное количество сыра, ведь последовательность масс кусков монотонно убывает и массы первого (а также второго) являются подпоследовательностями этой последовательности.

<u>Критерии оценивания</u>. Доказано, что за 2 минуты Лиса может бесконечно много раз откусить сыр + 8 баллов. Записано выражение: сколько сыра достанется Лисе +12 баллов. Найдена сумма ряда b_n +20 баллов. Если сумма ряда b_n не найдена, но верно записана формула сколько сыра досталось каждому медвежонку, то +4 балла. Обосновано, что при любом выборе b_n (таком, что Лиса сделает бесконечно много ходов) медвежатам останутся одинаковые куски сыра +10 баллов. За каждую арифметическую ошибку минус 1, 2, 3 или 4 четыре балла (на усмотрение проверяющего).

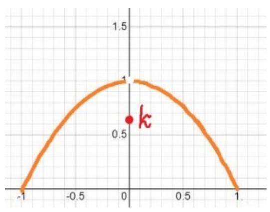
<u>Решение задачи Б1</u>.

Заметим, что $F(x) = F(-x)$, т.к. выражение $\int\limits_0^{1-x^2} f\left(x^{2n}\cdot t\right)\,dt$ зависит от x^2, т. е. $F(x)$ чётная функция.

При $x=0$: $F(0) = \lim\limits_{n\to+\infty}\int\limits_0^1 f(0\cdot t)\,dt = \int\limits_0^1 k\,dt = k$. При $x=1$: $F(1) = \lim\limits_{n\to+\infty}\int\limits_0^0 f(t)\,dt = 0 = F(-1)$.

При $0<x<1$ $\lim\limits_{n\to+\infty} x^{2n} = 0$. По теореме о среднем значении $\exists\xi_n \in \left(0, 1-x^2\right)$, такие, что выполняется равенство: $\int\limits_0^{1-x^2} f\left(x^{2n}\cdot t\right)\,dt = f\left(x^{2n}\cdot\xi_n\right)\cdot\left(1-x^2\right)$. Заметим, что $\lim\limits_{n\to+\infty} x^{2n}\cdot\xi_n = 0$ (произведение беск. малой на огр.), $\lim\limits_{u\to 0} f(u) = 1$.

Итак, $F(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f\left(x^{2n}\cdot\xi_n\right)\cdot\left(1-x^2\right) = 1-x^2$, при $0<x<1$. $F(x) = \begin{cases} 1-x^2, & 0<|x|\le 1; \\ k, & x=0. \end{cases}$



Если $k=1$, то функция является многочленом второй степени: $F(x) = 1-x^2$, следовательно, непрерывна на отрезке.

<u>Критерии оценивания</u>. Правильно выделены множества и точки, чтобы найти $F(x)$ +6 баллов.

Найдены значения $F(0)$ и $F(\pm 1)$ +4 балла за каждое значение (всего +8).

Функция $F(x)$ найдена на множестве $0<|x|<1$ +24 баллов; они складываются из:

грамотно применена Первая теорема о среднем (или сделан предельный переход по параметру) + 16 баллов;

правильно найден предел +8 балла.

Исследована непрерывность функции + 8 балла. Построен эскиз графика +4 балла.

За попытки найти первообразную функции $f(u)$ минус 5 баллов.

Если задача решена, получен правильный ответ, но:

не обоснован предельный переход под знаком интеграла, то от минус 10 до минус 20 баллов;

нет обоснования непрерывности функции для $k=1$, то минус 2 балла.

Задача по алгебре (Вариативная часть Блок 2 на 50 баллов)

1 Квадратная матрица $A = (a_{ij})$ порядка n над полем действительных чисел при повороте на $90°$ меняет знак. (Т.е. при любых $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$ выполняется равенство $a_{ij} = -a_{n+1-j,n+1-i}$).

Какие значения может принимать определитель этой матрицы при заданном n?

Решение. Отметим, что в условии содержится опечатка, а именно вместо $a_{ij} = -a_{n+1-j,n+1-i}$) должно быть $a_{ij} = -a_{j,n+1-i}$), что действительно соответствует изменению знака при повороте на $90°$, а получившееся в скобках условие соответствует изменению знака при симметрии матрицы относительно побочной дикгонали. Тем самым по существу условие содержит две разные задачи: "по тексту"и "по формуле". Жюри решило оценивать продвижения в любой из них.

Понимание условия "по тексту".

Ответ: Только 0 при $n = 4k + 1$ или $n = 4k + 2$. Любое действительное число при $n = 4k$ или $n = 4k + 3$. (k — целое)

Обозначим через F квадратную матрицу порядка n, с единицами на побочной диагонали и нулями в остальных местах. Поскольку F можно получить из единичной матрицы симметрией относительно серединного перпендикуляра к строке, имеем равенство

$$|F| = (-1)^{[n/2]}|E| = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}|E| = \begin{cases} 1, & \text{при } n = 4k \text{ или } n = 4k + 1 \\ -1, & \text{при } n = 4k + 2 \text{ или } n = 4k + 3 \end{cases}$$

Пусть A — произвольная квадратная матрица порядка n. Обозначим через A^R — матрицу, полученную из матрицы A поворотом на $90°$ по часовой стрелке. Тогда матрица A, удовлетворяющая условию задачи, удовлетворяет равенству $A^R = -A$. Поскольку поворот на на $90°$ по часовой стрелке это сумерпозиция двух симметрий относительно прямых, угол между которыми $45°$, имеем $A^R = A^T \cdot F$. Тогда матрица A, удовлетворяющая условию задачи, удовлетворяет равенству $-A^T \cdot F = A$. Используя свойства определителя, получим

$$|A| = |-E| \cdot |A^T| \cdot |F| = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}|A| = \begin{cases} |A|, & \text{при } n = 4k \text{ или } n = 4k + 3 \\ -|A|, & \text{при } n = 4k + 1 \text{ или } n = 4k + 2 \end{cases}$$

Это значит, что $|A| = 0$ при $n = 4k + 1$ или $n = 4k + 2$.

Приведем одну конструкцию для построения примеров при $n = 4k$ или $n = 4k + 3$. Разумеется такая конструкция не единственная.

Построим сначала примеры при $n = 3$ и $n = 4$.

$$A_3(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & -a \\ -1 & 0 & -1 \\ -a & 1 & a \end{pmatrix} \quad A_4(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ -a & 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

Тогда $|A_3(a)| = 4a$, $|A_4(a)| = 4a - 1$. Ясно, что для любого действительного числа t, получится $t = A_3(t/4) = A_4((t + 1)/4)$.

Теперь, используя теорему Лапласа или теорему об определителе полураспавшейся матрицы, а также изменение знака при перестановке строк или столбцов, получим, что для пары произвольных квадратных матриц X и Y верно равенство определителей

$$|Z| = \begin{vmatrix} X & 0 & -X^R \\ 0 & Y & 0 \\ -((X^R)^R)^R & 0 & (X^R)^R \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X & -X^R & 0 \\ -((X^R)^R)^R & (X^R)^R & 0 \\ 0 & 0 & Y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X & -X^R \\ -((X^R)^R)^R & (X^R)^R \end{vmatrix} \cdot |Y|$$

Теперь взяв в качестве Y квадратную матрицу порядка $4k-4$ или $4k-1$ с определителем $|Y| = t$, удовлетворяющую условию $Y^R = -Y$, и взяв

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ при этом } \begin{vmatrix} X & -X^R \\ -((X^R)^R)^R & (X^R)^R \end{vmatrix} = |A_4(1/2)| = 1,$$

получим, что Z квадратная матрица порядка $4k$ или $4k+3$, соответственно, $|Z| = |Y| = t$ и $Z^R = -Z$. Тем самым мы мыполним шаг индукции по k при построении примеров.

Критерии оценивания.

За верный ответ отдельно 4 балла. Остальные 46 баллов делятся пополам для случаев n вида $n = 4k+1$ или $n = 4k+2$ и n вида $n = 4k$ или $n = 4k+3$

Доказательство равенства 0, для конечного множества значений n вида $n = 4k+1$ или $n = 4k+2$. (по 1 баллу за каждое значение n, но не более, чем 3 балла)

Доказательство равенства 0, для какого-нибудь бесконечного множества значений n вида $n = 4k+1$ или $n = 4k+2$. (10 баллов)

Доказательство равенства 0, при всех значениях n вида $n = 4k+1$ или $n = 4k+2$. (23 балла)

Построение примера для конечного множества значений n вида $n = 4k$ или $n = 4k+3$. (по 2 балла за каждое значение n, но не более, чем 4 балла)

Построение примера для какого-нибудь бесконечного множества значений n вида $n = 4k$ или $n = 4k+3$. (12 баллов)

Построение примера для всех значений n вида $n = 4k$ или $n = 4k+3$. (23 балла)

Понимание условия "по формуле".

Ответ: Только 0 при $n = 2k+1$. Любое неотрицательное действительное число при $n = 4k+2$. Любое неположительное действительное число при $n = 4k$. (k — целое)

Обозначим через F квадратную матрицу порядка n, с единицами на побочной диагонали и нулями в остальных местах. Поскольку F можно получить из единичной матрицы симметрией относительно серединного перпендикуляра к строке, имеем равенство

$$|F| = (-1)^{[n/2]}|E| = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}|E| = \begin{cases} 1, & \text{при } n = 4k \text{ или } n = 4k+1 \\ -1, & \text{при } n = 4k+2 \text{ или } n = 4k+3 \end{cases}$$

Пусть A — произвольная квадратная матрица порядка n. Обозначим через A^R — матрицу, полученную из матрицы A симметрией относительно побочной диагонали. Тогда матрица A, удовлетворяющая условию задачи, удовлетворяет равенству $A^R = -A$.

Поскольку симметрия относительно побочной диагонали это сумерпозиция трех симметрий относительно прямых, угол между которыми $45°$, имеем $A^R = (A \cdot F)^T \cdot F$. Тогда матрица A, удовлетворяющая условию задачи, удовлетворяет равенству $-(A \cdot F)^T \cdot F = A$. Используя свойства определителя, получим

$$|A| = |-E| \cdot |(A \cdot F)^T| \cdot |F| = |-E| \cdot |A| \cdot |F| \cdot |F| = (-1)^n |A| = \begin{cases} |A|, & \text{при } n = 2k \\ -|A|, & \text{при } n = 2k+1 \end{cases}$$

Это значит, что $|A| = 0$ при $n = 2k+1$.

Для обоснования знака определителя при $n = 2k$ рассмотрим матрицу $B = A \cdot F$. Тогда B — кососимметрическая матрица. Действительно $B^T = (A \cdot F)^T = A^R \cdot F = -A \cdot F = -B$. Кроме того,

$$|B| = |A| \cdot |F| = \begin{cases} |A|, & \text{при } n = 4k \\ -|A|, & \text{при } n = 4k+2 \end{cases}$$

Таким образом остается показать, что определитель кососимметрической матрицы четного порядка над полем действительных чисел не может быть отрицательным.

Достаточно просто сослаться на известный факт, что определитель кососимметрической матрицы четного порядка является полным квадратом. Но можно и привести схему доказательства этого факта.

Будем рассматривать кососимметричную матрицу C четного порядка как полученную из кососимметричной матрицы B нечетного порядка $n-1$ окаймлением:

$$C = \begin{pmatrix} & & & & b_{1,n} \\ & & & & b_{2,n} \\ & & B & & \vdots \\ & & & & b_{n-1,n} \\ -b_{1,n} & -b_{2,n} & \dots & -b_{n-1,n} & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда, на основании формулы для окаймленного определителя, симметричность присоединенной к кососимметрической матрице нечетноого порядка, по существу доказанного выше условия $|B| = 0$, а также тождества Сильвестра вытекает равенство:

$$|B| = (-b_{1,n}, -b_{2,n}, ..., -b_{n-1,n}) \cdot (B^V)^T \cdot (b_{1,n}, b_{2,n}, ..., b_{n-1,n})^T = \left(\sum_{t=1}^{n-1} \sqrt{B_{tt}} b_{t,n}\right)^2,$$

где B^V — присоединенная к B матрица.

Однако же алгебраические дополнения B_{tt} представляют из себя также определители кососимметричных матриц четного порядка $n-2$, т.е. неотрицательны по предположению индукции, и, следовательно, $\sqrt{B_{tt}}$ — действительные числа.

Примером матрицы, меняющей знак при симметрии относительно побочной диагонали с определителем равным a^2 при $n = 4k$ и равным $-a^2$ при $n = 4k+2$ является матрица

$$A(a) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & -a \end{pmatrix}$$

Критерии оценивания.

За верный ответ отдельно 4 балла. Остальные 46 баллов делятся пополам для случаев n вида $n = 2k$ и n вида $n = 2k+1$ или $n = 4k+3$

Доказательство равенства 0, для конечного множества значений n вида $n = 2k+1$. (по 1 баллу за каждое значение n, но не более, чем 3 балла)

Доказательство равенства 0, для какого-нибудь бесконечного множества значений n вида $n = 2k+1$. (10 баллов)

Доказательство равенства 0, при всех значениях n вида $n = 2k+1$. (23 балла)

Построение примера и доказательство для конечного множества значений n вида $n = 2k$. (по 1 баллу за каждое значение n, но не более, чем 3 балла)

Построение примера для всех значений n вида $n = 2k$. (4 балла)

Доказательсво невозможности получений значений определителя, соответствующего знака для какого-нибудь бесконечного множества значений n вида $n = 2k$. (9 баллов)

Доказательсво невозможности получений значений определителя, соответствующего знака для всех значений n вида $n = 2k$. (19 баллов)