

5-8 класс

Каждое задание оценивается максимум в 10 баллов. Время выполнения – 60 минут.

**1.** Ежик подарил Крошу электронные часы, которые показывают часы и минуты (например, 13:25). Тренируясь в счете, Крош находит сумму цифр на этих часах ( $1 + 3 + 2 + 5 = 11$ ). Запишите такое время суток, когда сумма цифр на часах будет наибольшей.

Ответ. 19:59 .

Критерии оценивания. Пояснения не требуются, за верный ответ выставляется 10 баллов.

**2.** Карлсон решил похулиганить. Взял шахматные фигуры: короля, ладью, коня и пешку и положил их в четыре ящика (по одной фигуре в каждый), а каждый ящик подписал.

Надпись на 1-м: здесь находится конь.

На 2-м: здесь находится ладья.

На 3-м: если в первом ящике находится пешка, то тут лежит король или ладья.

На 4-м: тут лежит король.

Карлсон хотел всех запутать, поэтому все подписи не соответствуют действительности. Помогите Малышу понять, какая шахматная фигура находится в каком ящике. В ответе запишите последовательность номеров ящиков, в которых лежат король, ладья, конь и пешка. (должно получиться четырехзначное число). Ответ обоснуйте.

Решение. Надпись на 3 ящике неверна, следовательно, в первом ящике лежит пешка, а в третьем – не король и не ладья, следовательно, конь. Из надписи на 4-м ящике следует, что там не король, значит, поскольку пешка в 1-м, а конь – во 2-м, то в 4-м лежит ладья. Остается король, который находится во втором ящике.

Ответ. 2431

Критерии оценивания. За полное корректное решение выставляется 10 баллов; за решение без пояснений либо с некорректным пояснением, но с верным ответом выставляется 2 балла.

**3.** Брат и сестра пошли в лес по ягоды. Брат собирает 500 г ягод за 5 минут, а сестра – вдвое быстрее. За сколько минут брат и сестра вместе соберут бидон, в который входит ровно 900 г ягод? Ответ обоснуйте.

Решение.

1)  $500:5=100$  (г) ягод за 1 мин собирает брат.

2)  $100*2=200$  (г) ягод за 1 мин собирает сестра.

3)  $900:(100+200) = 3$  (мин) – за столько соберут ягоды брат и сестра вместе.

Ответ. За 3 минуты.

Критерии оценивания. 1 и 2 пункта решения оцениваются по 3 балла; 3 пункт – в 4 балла.

4. Карабас Барабас хранит в укромном месте 101 жемчужину. Буратино стало известно место нахождения жемчужин, а также информация, что одна жемчужина поддельная. Помогите Буратино при помощи двух взвешиваний на чашечных весах без гирь определить, тяжелее или легче поддельная жемчужина. Ответ обоснуйте.

Решение. Сначала выбираем любые 100 жемчужин и делим их на две части, в каждой по 50 жемчужин. Взвешиваем каждую часть. Может быть два исхода:  
1) Равенство весов. В этом случае, берем оставшуюся жемчужину (она поддельная) и взвешиваем с любой другой второй.

2) Неравенство весов. Берем более тяжелую кучку, разбиваем ее на две кучки по 25 жемчужин и взвешиваем. Здесь также возможны две ситуации:

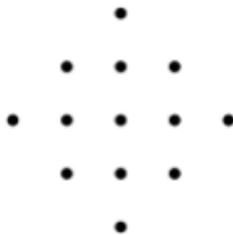
2.1) Вес кучек одинаковый, значит поддельная жемчужина находится в другой куче из 50 штук, и она легче.

2.2) Вес кучек неодинаковый, значит поддельная жемчужина находится в этой куче из 50 штук, и она тяжелее.

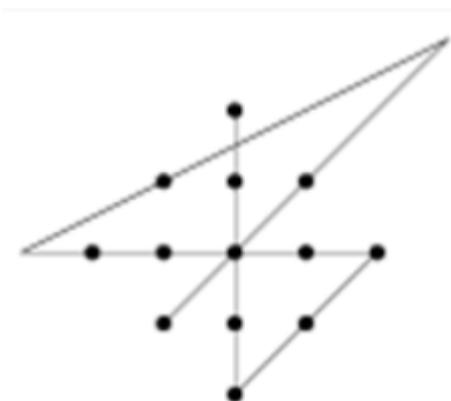
Обратите внимание, что по условию задачи нет необходимости выяснять, какая именно жемчужина поддельная, а требуется лишь определить, легче она или тяжелее остальных.

Критерии оценивания. Задача оценивается в 10 баллов при полном обоснованном решении; в противном случае выставляется 0 баллов.

5. Зачеркните все 13 точек на рисунке пятью отрезками, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя никакую линию дважды.



Решение.



Критерии оценивания. Задача оценивается в 10 баллов при полном верном решении; в противном случае выставляется 0 баллов.

## 9-11 класс

Внимание! Каждое задание оценивается в 10 баллов. Время выполнения – 60 минут.

1. На заправке случилась авария, но виновник скрылся с места преступления. Пострадавший запомнил все буквы государственного номера, а также, что все цифры были различные, но какие именно - неизвестно. Автомобильный номер состоит из трёх любых цифр, в том числе может начинаться с нуля. Сколько автомобилей максимально может подходить под тот, который принадлежит виновнику?

Решение. Существует всего 10 цифр. Номер состоит из трёх различных цифр, то есть на первом месте может быть 10 цифр, на втором – 9 (так как не может повторяться цифра, которая стоит на первом месте), на третьем – 8. Таким образом, всего может быть  $10 \cdot 8 \cdot 9 = 720$  автомобилей.

Ответ. 720 автомобилей.

Критерии оценивания. Пояснения не требуются, за верный ответ выставляется 10 баллов.

2. Какой цифрой оканчивается число  $2022^{2022}$ ? Ответ обоснуйте.

Решение. Заметим, что число  $2022^{2022}$  оканчивается на ту же самую цифру, что и число  $2^{2022}$ . Выпишем последние цифры нескольких начальных степеней двойки: 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, 2, ... Очевидно, что  $2^5$  также, как и  $2^1$ , оканчивается на 2. Поскольку очередная цифра полностью определяется последней цифрой предыдущей степени, то произойдёт «зацикливание». Поскольку длина цикла равна 4, то последняя цифра числа  $2^{2022}$  определяется остатком от деления числа 2022 на 4. Так как он равен 2, то последняя цифра числа  $2^{2022}$  совпадает с последней цифрой числа  $2^2$ , то есть равна 4.

Ответ. 4.

Критерии оценивания. За верный обоснованный ответ выставляется 10 баллов, необоснованное или неполное решение оценивается в 0 баллов.

3. Докажите тождество для всех натуральных  $n \geq 2$ :

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}.$$

Решение. Проведем доказательство методом математической индукции.

База индукции. Проверим тождество при  $n=2$ . Имеем  $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ , что является верным.

Предположение индукции. Считаем верным:

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}.$$

*Шаг индукции. Рассмотрим случай при  $n+1$ . Левая часть в этом случае следующая:*

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+1}{2n} \cdot \frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2} = \frac{n+2}{2(n+1)}$$

*Очевидно, что левая часть равна правой. Тожество доказано.*

*Критерии оценивания. За верный обоснованный ответ выставляется 10 баллов, необоснованное или неполное решение оценивается в 0 баллов.*

4. Найдите все положительные действительные решения системы уравнений:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}(x^2 + y^2) = 36, \\ \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}(x^2 + z^2) = 44, \\ \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}(y^2 + z^2) = 48. \end{cases}$$

*Решение. Сложим все три уравнения, получим:*

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}(2x^2 + 2y^2 + 2z^2) = 128.$$

*После преобразований имеем:*

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^3 = 64.$$

*Откуда получим:*

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 4.$$

*Подставим полученное выражение в первоначальную систему, получим:*

$$\begin{cases} 4(x^2 + y^2) = 36, \\ 4(x^2 + z^2) = 44, \\ 4(y^2 + z^2) = 48. \end{cases}$$

*Разделив обе части каждого уравнения системы, получим:*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ x^2 + z^2 = 11, \\ y^2 + z^2 = 12. \end{cases}$$

*Выражая из второго уравнения  $x^2$ , а из третьего -  $y^2$ , и, подставив их в первое уравнение, получим, что  $z^2 = 7$ . Откуда получаем:  $x = 2, y = \sqrt{5}, z = \sqrt{7}$ .*

*Ответ.  $x = 2, y = \sqrt{5}, z = \sqrt{7}$ .*

Критерии оценивания. Если верно выполнено сложение уравнений, то выставляется 3 балла. Если после сложения верно найдено значение квадратного корня, то выставляется ещё 3 балла. За корректную подстановку значения квадратного корня в систему ещё 1 балл. За верные найденные значения  $x, y, z$  по 1 баллу.

5. В треугольнике ABC сторона BC равна 4, а медиана, проведённая к этой стороне, равна 3. Найдите длину общей хорды двух окружностей, каждая из которых проходит через точку A и касается BC, причём одна касается BC в точке B, а вторая — в точке C.

Решение. Пусть D — вторая точка пересечения указанных окружностей, а прямая AD пересекает BC в точке M. Тогда по теореме о касательной и секущей

$$MB^2 = MA \cdot MD = MC^2,$$

поэтому  $MB = MC$ , т.е. AM — медиана треугольника ABC,  $AM = 3$ . Из уравнения

$$MA(MA - AD) = MB^2, \text{ или } 3(3 - AD) = 4$$

находим, что  $AD = 5/3$ .

Ответ. 5/3.

Критерии оценивания. За корректное применение теоремы о касательной и секущей выставляется 3 балла; за доказательство, что AM — медиана выставляется 2 балла. Если при выше указанных условиях верно найдено значение AD, то выставляется ещё 5 баллов.